

亚/超声速楔状流层流边界层速度与 温度相似解及拟合解

赵国昌¹, 杜霞², 宋丽萍³, 孔敬儒²

(1. 沈阳航空航天大学 航空航天工程学部(院)

辽宁省航空推进系统先进测试技术重点实验室, 沈阳 110136;

2. 沈阳航空航天大学 航空航天工程学部(院), 沈阳 110136;

3. 沈阳航空航天大学 高等教育研究所, 沈阳 110136)

摘 要: 利用相似变换获得了楔状流层流边界层无量纲流函数的 3 阶非线性常微分方程, 用 Runge-Kutta 法求解微分方程获得了不同楔形角楔状流层流边界层无量纲速度随相似变量的变化曲线; 推导了亚声速和超声速楔状流层流边界层无量纲温度关于相似变量的 2 阶线性齐次和非齐次微分方程, 获得了温度分布的通解, 恒壁温条件下亚声速楔状流和绝热壁面条件下超声速楔状流层流边界层无量纲温度解析解及指数函数形式的拟合解. 以楔形角为 0 为例利用相似变换研究了超声速条件下气体压缩性及黏度随温度变化等因素对层流边界层速度与温度的影响, 得出不可压缩常物性与可压缩变物性条件下无量纲速度相对误差绝对值小于 9.8% 的结论. 研究表明: Pr 越大贴近壁面处无量纲温度变化越剧烈; 超声速条件下壁温低于绝热壁温时黏性耗散作用可以使层流边界层气体温度从壁面到主流间出现先升高后降低的变化.

关 键 词: 流函数; 无量纲温度; 亚/超声速; 层流边界层; 楔状流; 相似变换; 解析解; 拟合解

中图分类号: V211.1⁺9

文献标志码: A

Similarity solutions and approximation solutions of velocity and temperature in laminar boundary layer of subsonic and supersonic wedge flows

ZHAO Guo-chang¹, DU Xia², SONG Li-ping³, KONG Jing-ru²

(1. Liaoning Key Laboratory of Advanced Measurement and Test Technology for

Aviation Propulsion System, Faculty of Aerospace Engineering,

Shenyang Aerospace University, Shenyang 110136, China;

2. Faculty of Aerospace Engineering,

Shenyang Aerospace University, Shenyang 110136, China;

3. Institute of High Education,

Shenyang Aerospace University, Shenyang 110136, China)

Abstract: The variations in the dimensionless velocity due to changes in similarity variables of wedge flows with different wedge angles were obtained using the Runge-Kutta method by solving the third-order nonlinear ordinary differential equation of the dimensionless stream function that was obtained through similarity transformation, which described the wedge flow in the laminar boundary layer. The second-order linear homogeneous differential equation of dimensionless temperature based on the similarity variable in the laminar bounda-

收稿日期: 2014-05-25

基金项目: 航空科学基金(20131954004); 辽宁省攀登学者基金(20132015)

作者简介: 赵国昌(1964—), 男, 北京人, 教授、博士生导师, 博士, 主要从事航空动力工程中的流动传热及热管理研究.

ry layer of the subsonic wedge flow and the second-order linear non-homogeneous differential equation of dimensionless temperature on the similarity variable in the laminar boundary layer of the supersonic wedge flow were derived. The general temperature distribution solutions in the laminar boundary layers of subsonic and supersonic wedge flow, the similarity solutions and exponential form approximation solutions of dimensionless temperature in the laminar boundary layers under the condition of constant wall temperature for subsonic wedge flow and the condition of adiabatic wall for supersonic wedge flow were obtained by solving the above two differential equations. The effects of compressibility and viscosity of the supersonic gas in the laminar boundary layer on velocity and temperature were investigated using the wedge flow of wedge angle of 0 as a representative example. It is shown that the maximum absolute value of relative errors between the similarity solution obtained under the condition of incompressible and constant properties and the similarity solution obtained under the condition of compressible and variable properties is less than 9.8% . Results show that: the larger the Pr of the wedge flow, the more dramatic the change in dimensionless temperature in the area close to the wall; the viscous dissipation causes the temperature of the wedge flow from the wall to the main flow in the boundary layer to first increase and then decrease under supersonic flow conditions and with temperatures lower than the adiabatic wall temperature.

Key words: stream function; dimensionless temperature; subsonic and supersonic; laminar boundary layer; wedge flows; similarity transformation; analytical solutions; approximation solutions

飞行器中存在许多可以简化为楔形体的结构件,例如高速飞行器的翼前缘[1],高超声速飞行器的乘波体结构[2-3],一体化加力燃烧室内支板[4],飞行器的机翼[5],双模态冲压燃烧室内支板引射器[6-7],超燃冲压发动机进口段内具有喷射燃油、增强燃油与空气掺混作用的支板[8]等。这些楔形体结构件要承受很大的气动热,对其进行热分析和有效的热防护成为近年的研究重点[9]。随着航空航天事业的发展,高超声速飞行器的结构及热防护设计研究越来越深入。为了更好地对结构进行热防护,需对结构外部层流边界层速度和温度分布规律进行深入研究。本文在前人对气体绕平板层流边界层流动和换热研究的基础上,对亚声速及超声速气体绕楔形体层流边界层流动和换热规律进行了研究。首先对楔状层流边界层动量方程进行相似变换得到关于流函数的微分方程,运用 Runge-Kutta 法求解得到流函数及其导数随相似变量的变化关系,计算并分析无量纲速度随相似变量的变化规律;然后对超声速气体绕楔形体流动边界层内能量方程进行相似变换,导出无量纲温度的 2 阶非齐次微分方程,求解该非齐次微分方程得到无量纲温度解析式,运用梯形积分法对无量纲温度解析式中的被积函数进行积分得到温度场数值解,从而获得边界层内无量纲

温度随相似变量变化的规律。

1 亚声速楔状层流边界层速度与温度分布

相似解是指气流在楔形体沿 x 方向流动时不同位置边界层的速度或温度分布存在相似性。相似变换是指对于一个偏微分方程,通过变换得到用单一函数来表示的常微分方程,这样既便于方程的求解,所得结果又具有通用性,经过相似变换得到的常微分方程解即为相似解[10]。本节研究的物理模型是等温亚声速气体绕温度恒定的楔形体流动时层流边界层内的速度和温度分布变化规律。求解楔形体层流边界层内的流动问题可根据哥尔斯顿[10-11]的论述得到如下边界层动量方程式:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1)$$

式中 u 为绕流气体在 x 方向上的速度分量, v 为 y 方向上的速度分量, ρ 为密度, p 为压力, ν 为气体的运动黏度。在主流区 $u = u_\infty$, $\partial u / \partial y = \partial^2 u / \partial y^2 = 0$, 所以 $-(1/\rho)(dp/dx) = u_\infty (\partial u_\infty / \partial x)$, 因此式(1)可转化为

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_\infty \frac{\partial u_\infty}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2)$$

当主流速度 u_∞ 按式(3)规律变化时

$$u_{\infty} = cx^m \quad (3)$$

式中 c 和 m 是常数,式(2)存在相似解. 主流速度按式(3)变化的流动被称为楔状流,如图 1 所示(δ 为速度边界层厚度). 其中 m 和楔形角 β 之间存在以下关系:

$$m = \frac{\beta/\pi}{2 - \beta/\pi}$$

或

$$\frac{\beta}{\pi} = \frac{2m}{m+1} \quad (4)$$

式中 β 与 m 的对应关系见表 1. 当 $\beta=0$, 即 $m=0$

时,为气体外掠平板流动;当 $\beta=\pi$, 即 $m=1$ 时,为气体垂直冲击平板流动;当 $0<\beta<\pi$ 时,为一般情况下的气体外掠楔形体流动.

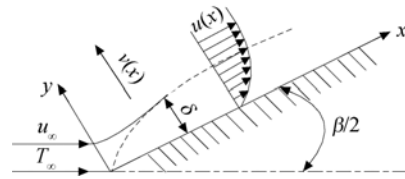


图 1 简化楔形体结构及其外部层流流动
Fig. 1 Simplified wedge structure and external laminar flow

表 1 β 与 m 对应关系、无量纲流函数 f 的 2 阶导数在 $\eta=0$ 处的值

Table 1 Relation between β and m , value of the second order derivative of dimensionless stream function f at $\eta=0$

项目	β										
	0	$\pi/10$	$2\pi/10$	$3\pi/10$	$4\pi/10$	$5\pi/10$	$6\pi/10$	$7\pi/10$	$8\pi/10$	$9\pi/10$	π
m	0	0.05263	0.1111	0.1765	0.2500	0.3333	0.4286	0.5385	0.6667	0.8182	1.0000
$f''(0)$	0.3320	0.42580	0.5118	0.5942	0.6754	0.7573	0.8415	0.9295	1.0226	1.1229	1.2325

对式(2)进行相似变换,流函数 Ψ 和相似变量 η 可用式(5a)~式(5e)表示,其中 f 为无量纲流函数.

$$\Psi = (\sqrt{c\nu})x^{(m+1)/2}f \quad (5a)$$

$$\eta = y(\sqrt{c\nu^{-1}})x^{(m-1)/2} \quad (5b)$$

$$u = \partial\Psi/\partial y \quad v = -\partial\Psi/\partial x \quad (5c)$$

式中 u, v 用相似变量 η 表示的关系式为

$$u = u_{\infty}f'(\eta) \quad (5d)$$

$$v = -\sqrt{\frac{u_{\infty}\nu}{x}} \left[\frac{m+1}{2}f + \frac{m-1}{m+1}\eta f' \right] \quad (5e)$$

将式(5d)和式(5e)及 $\partial u/\partial y, \partial^2 u/\partial y^2, \partial u/\partial x$ 的表达式代入式(2),得到式(6)所示的与相似变量 η 相关的无量纲流函数 f 的 3 阶非线性常微分方程

$$f''' + \frac{m+1}{2}ff'' + m(1-f'^2) = 0 \quad (6)$$

其中边界条件为 $f(0)=0, f'(0)=0, f'(\infty)=1$. 当 $m=0$ 时,式(6)的流函数解为布劳修斯解^[12]; 当 $m \neq 0$ 时,式(6)的求解复杂,可采用积分迭代法^[13]、Adomian 拆分法和 Crocco 变换法及 Runge-Kutta 法^[14-15] 等进行求解,本文采用 Runge-Kutta 法进行求解,获得了楔形角 $\beta=2\pi/10=0.628$ 时无量纲流函数的数值解,结果如图 2 和图 3 所示. 图 2 是无量纲流函数 f 及其 1 阶、2 阶导数随相似变量 η 的变化曲线,流函数的 1 阶导数 $f'(\eta)|_{\eta \rightarrow \infty} = 1$ 满足边界条件要求. 图 3

是本文求解式(6)获得的在 0 到 π 范围内每间隔 $\pi/10$ 的 11 个角度的楔状流函数的 1 阶导数 $f'(\eta) = u/u_{\infty}$ (即无量纲速度)随相似变量 η 的变化曲线. 用 Runge-Kutta 法求解流函数 3 阶以下导数随 η 变化时,需要流函数 1 阶和 2 阶导数在 $\eta=0$ 处的值,其中 1 阶导数的值为零;2 阶导数的值可以通过迭代运算,利用 $f'(\eta)|_{\eta \rightarrow \infty} = 1$ 这一约束条件得到,如表 1 所示. 由图 3 可见,无量纲速度随着 η 的增加而趋于 1,即边界层流体速度逐渐达到主流速度; β 越大无量纲速度随 η 的变化在靠近壁面处($\eta=0$)越剧烈,速度边界层越薄.

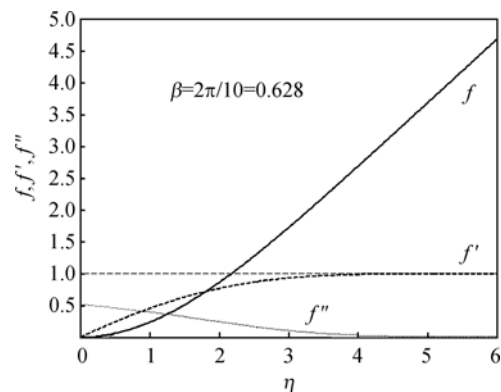


图 2 无量纲流函数 f 及其导数随相似变量 η 的变化
Fig. 2 Variation of dimensionless stream function f and its derivatives along with similarity variable η

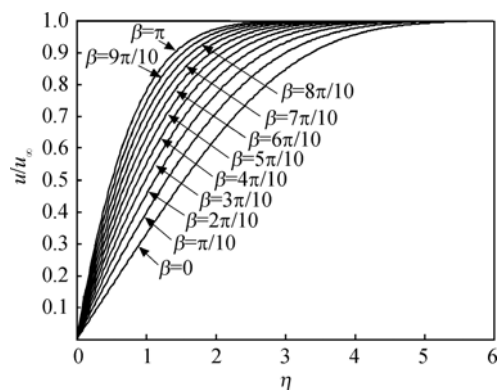
图3 边界层中无量纲速度 u/u_∞ 随相似变量 η 的变化

Fig. 3 Variation of dimensionless velocity u/u_∞ in boundary layer along with similarity variable η

在常物性、不考虑黏性耗散作用条件下,气体楔状流层流边界层内的能量方程无量纲形式如式(7)所示

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (7)$$

其中 a 为热扩散系数; $\theta = (T_w - T)/(T_w - T_\infty)$, T 为气体温度, T_w 为楔形体壁面温度, T_∞ 为主流区域气体温度. 通过相似变换得到 $\partial \theta / \partial x$, $\partial \theta / \partial y$ 的表达式

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{m-1}{2} \cdot \frac{\eta}{x} \theta'(\eta) \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{x} \sqrt{\frac{u_\infty x}{\nu}} \theta'(\eta) \quad (8)$$

将式(8)及 $\partial^2 \theta / \partial y^2$ 的表达式代入式(7), 得到无量纲温度关于 η 的2阶线性齐次微分方程

$$\theta'' + \frac{1}{2}(m+1)Prf\theta' = 0 \quad (9)$$

经推导得式(9)的通解为

$$\theta = C_1 \int_0^\eta \exp\left[-\frac{(m+1)Pr}{2} \int_0^\eta f d\eta\right] d\eta + C_2 \quad (10)$$

式(9)的流动边界条件为 $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f'(\infty) = 1$, $\eta = \infty$ 处温度边界条件为 $\theta(\infty) = 1$, 其中 C_1, C_2 为积分常数. 在恒壁温条件下 $\eta = 0$ 处的温度边界条件为 $\theta(0) = 0$. 由 $\theta(0) = 0$ 边界条件可得 $C_2 = 0$, 由 $\theta(\infty) = 1$ 边界条件可得

$$C_1 = \left\{ \int_0^\infty \exp\left[-\frac{(m+1)Pr}{2} \int_0^\eta f d\eta\right] d\eta \right\}^{-1} \quad (11)$$

恒壁温条件下用 θ_1 表示 θ , 将 C_1, C_2 代入式(10)中, 得到如式(12)所示的恒壁温楔状流无量纲温度解析解

$$\theta_1 = \frac{\int_0^\eta \exp\left[-\frac{(m+1)Pr}{2} \int_0^\eta f d\eta\right] d\eta}{\int_0^\infty \exp\left[-\frac{(m+1)Pr}{2} \int_0^\eta f d\eta\right] d\eta} \quad (12)$$

当 $m=0$ 时, 式(12)简化为波尔豪森解^[16]; 当 $m \neq 0$ 时, 式(12)中含有流函数的不定积分, 积分运算需要对流函数数值解进行曲线拟合, 得到由 η 的多项式构成的流函数解析表达式^[17-18]. 需要指出的是, 文献[17-18]中给出的多项式都是如下形式:

$$f(\eta) = a_0 \eta^4 + a_1 \eta^3 + a_2 \eta^2 + a_3 \eta^1 + a_4 \eta^0 \quad (13)$$

其中 a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 为多项式的系数. 这样的多项式含有 a_3 和 a_4 两个非零系数, 在 $\eta=0$ 处由此多项式计算出的无量纲流函数 f 及其1阶导数 f' 不为零. 为了解决这一问题, 本文提出了如式(14)所示的无量纲流函数拟合多项式

$$f(\eta) = b_0 \eta^5 + b_1 \eta^4 + b_2 \eta^3 + b_3 \eta^2 \quad (14)$$

其中 b_0, b_1, b_2, b_3 为多项式的系数, 这个表达式没有 η 的一次项和零次项, 待定系数减为4个. 为方便求解不同楔形角的楔状流层流边界层内无量纲温度分布, 本文对无量纲流函数 f 进行了拟合, 得出了如表2所示的不同 β 下无量纲流函数 f 拟合多项式的系数. 当 $\beta = 2\pi/10$ ($m = 0.1111$) 时, 在 $0 \leq \eta \leq 8$ 范围内, 拟合解与数值解差值绝对值小于 3.51×10^{-2} , 相对误差小于 1.5%; 当 $\beta = \pi$ ($m = 1$) 时, 在 $0 \leq \eta \leq 8$ 范围内, 拟合解与数值解差值绝对值小于 1.04×10^{-1} , 相对误差小于 1.4%, 可见本文给出的无量纲流函数拟合多项式有很高精度, 可以代替与之相对应的数值解进行分析运算.

用 Runge-Kutta 法求解流函数 f 的数值解, 进行曲线拟合得到五次多项式系数, 将式(14)代入无量纲温度式(12)中, 利用梯形积分法计算得到楔形角 $\beta = 2\pi/10 = 0.628$ ($m = 0.1111$) 时恒壁温楔状流层流边界层无量纲温度在不同 Pr 下的数值解, 如图4所示, 其中纵坐标为 $(1 - \theta_1)$, 无量纲温度随相似变量 η 增加而增加直至趋于1, 在贴近壁面处 Pr 越大无量纲温度增加得越快, 在边界层内同一位置上 Pr 越大无量纲温度越大, Pr 越大温度边界层越薄.

在 Pr 一定时对式(12)进行积分获得无量纲温度数值解, 需要对流函数进行曲线拟合, 而后进行两重积分运算, 计算过程复杂、难度大. 为了减少无量纲温度计算工作量和计算难度, 为计算分析楔状流层流边界层温度场提供合理、简洁的工具, 给出了 $0 \leq \eta \leq 8, 0.6 \leq Pr \leq 1.0$ 条件下如式(15)所示的无量纲温度的指数函数形式的拟合解, 指数是相似变量 η 的二次多项式, 多项式的系数是 Pr 的线性函数. 此拟合解形式简洁, 反映了无量纲温度随相似变量 η 和 Pr 的变化规律.

表 2 无量纲流函数 f 拟合多项式系数

Table 2 Coefficients in fit formula of dimensionless stream function f

系数	β										
	0	$\pi/10$	$2\pi/10$	$3\pi/10$	$4\pi/10$	$5\pi/10$	$6\pi/10$	$7\pi/10$	$8\pi/10$	$9\pi/10$	π
$b_0/10^4$	2.079	1.832	1.284	0.5116	-0.4530	-1.601	-2.935	-4.470	-6.228	-8.250	-10.59
$b_1/10^3$	-3.219	-2.196	-0.7537	1.0107	3.060	5.391	8.019	10.97	14.30	18.08	22.39
$b_2/10^2$	0.3997	-0.7997	-2.106	-3.513	-5.022	-6.649	-8.410	-10.33	-12.44	-14.79	-17.42
$b_3/10^1$	1.660	2.129	2.559	2.971	3.377	3.787	4.208	4.648	5.113	5.614	6.163

$$1 - \theta_1 = \exp \{ - [(0.1152 Pr + 0.0240) \eta_1^2 + (0.1287 Pr + 0.1917) \eta_1] \} \quad (15)$$

图 5 为恒壁温楔状流层流边界层无量纲温度 $(1-\theta_1)$ 随相似变量 η 变化的拟合解与数值解的比较,为便于观察,图中只给出了当 $Pr=0.6$ 和

$Pr=1.0$ 时的拟合解与数值解.可以看出拟合解的离散点与数值解曲线贴近,当 Pr 分别为 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0 时,由式(15)计算的拟合解和根据式(12)通过数值积分获得的数值解差值的绝对值分别小于 8.71×10^{-3} , 9.87×10^{-3} , 10.27×10^{-3} , 10.15×10^{-3} 和 9.66×10^{-3} ,可见拟合解具有很高精度,可以代替数值解进行无量纲温度的分析计算.

2 超声速楔状流层流边界层速度与温度分布

对于超声速楔状流层流边界层流动和传热,需考虑黏性耗散功转化成的热量对温度场的影响,此时层流边界层内换热的能量方程^[19-20]如式(16)所示.本节用不可压缩常物性假设进行计算,可压缩变物性的影响将在第 3 节讨论.

$$u \frac{\partial \Theta}{\partial x} + v \frac{\partial \Theta}{\partial y} = a \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} + \frac{\mu}{\rho c_p} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (16)$$

其中 $\Theta = \frac{T - T_\infty}{T_\infty^* - T_\infty} = \frac{T - T_\infty}{u_\infty^2 / (2c_p)}$, T_∞^* 为气体滞止温度,

$\frac{\mu}{\rho c_p} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$ 为黏性耗散项, μ 为动力黏度, c_p 为比定压热容. 式(16)中 $\partial \Theta / \partial x$, $\partial \Theta / \partial y$ 的表达式分别为

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = \frac{m-1}{2} \cdot \frac{\eta}{x} \Theta', \quad \frac{\partial \Theta}{\partial y} = \frac{1}{x} \sqrt{\frac{u_\infty x}{\nu}} \Theta' \quad (17)$$

将式(17)及 $\partial^2 \Theta / \partial y^2$ 和 $\partial u / \partial y$ 的表达式代入式(16),得到超声速气体绕楔形体流动层流边界层内关于 Θ 的 2 阶线性非齐次微分方程

$$\Theta'' + \frac{1}{2} (m+1) Pr f \Theta' + 2 Pr f'' = 0 \quad (18)$$

其中边界条件 $\Theta(\infty) = 0$, 式(18)相对应的齐次微分方程为

$$\Theta'' + \frac{1}{2} (m+1) Pr f \Theta' = 0 \quad (19)$$

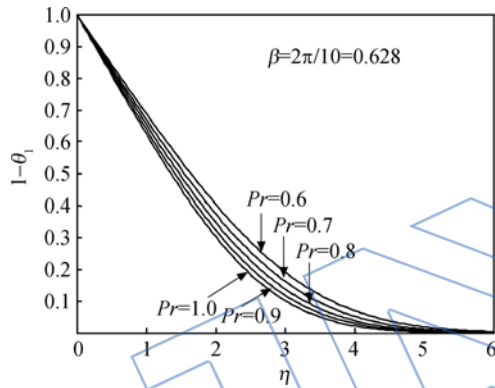


图 4 恒壁温楔状流层流边界层无量纲温度分布
Fig. 4 Dimensionless temperature distributions in laminar boundary layer of wedge flows under condition of isothermal wall

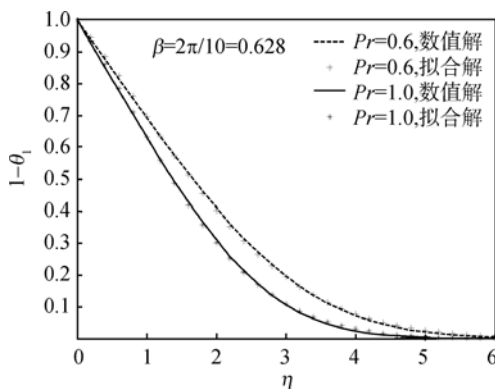


图 5 恒壁温楔状流层流边界层无量纲温度拟合解与数值解
Fig. 5 Approximation solution and numerical solution of dimensionless temperature in laminar boundary layer of wedge flows under condition of isothermal wall

式(18)的解由两部分相加组成,第1部分是齐次微分方程(19)的通解,和式(12)形式相同;第2部分是式(18)的一个特解,在超声速绝热壁面条件下获得.当壁面边界为绝热条件时,用 θ_2 表示 Θ ,对应的边界层气体温度用 T_2 表示,边界条件转化为 $\theta'_2(0)=0, \theta_2(\infty)=0$.利用无量纲温度的定义式 $\theta_2 = \frac{T_2 - T_\infty}{T_{aw}^* - T_\infty} = \frac{T_2 - T_\infty}{u_\infty^2/(2c_p)}$,将式(18)转化为式(20)所示的关于 θ_2 的无量纲形式

$$\theta_2'' + \frac{1}{2}(m+1)Prf\theta_2' + 2Prf''\theta_2 = 0 \quad (20)$$

对式(20)所表达的楔状流层流边界层无量纲温度2阶线性非齐次微分方程进行推导,得到超声速条件下无量纲温度的解析解

$$\theta_2 = \int_{\eta}^{\infty} \frac{2Pr \int_0^{\eta} f'' \exp\left[\frac{(m+1)Pr}{2} \int_0^{\eta} f d\eta\right] d\eta}{\exp\left[\frac{(m+1)Pr}{2} \int_0^{\eta} f d\eta\right]} d\eta \quad (21)$$

当 $\eta=0$ 时,式(21)简化为式(22)和式(23).

$$\theta_2(0) = \int_0^{\infty} \frac{2Pr \int_0^{\eta} f'' \exp\left[\frac{(m+1)Pr}{2} \int_0^{\eta} f d\eta\right] d\eta}{\exp\left[\frac{(m+1)Pr}{2} \int_0^{\eta} f d\eta\right]} d\eta \quad (22)$$

$$\theta_2(0) = \theta_{aw} = r_c \quad (23)$$

式中的 θ_{aw} 为无量纲绝热壁温,为将 θ_2 归一化,图6纵坐标采用 θ_2/r_c 的形式,其中 $r_c = \frac{T_{aw} - T_\infty}{T_{aw}^* - T_\infty} = \frac{T_{aw} - T_\infty}{u_\infty^2/(2c_p)}$ 为绝热壁面因摩擦而引起的温升

($T_{aw} - T_\infty$)与绝热温升($T_{aw}^* - T_\infty$)的比.由式(21)可知, θ_2 为定义域上的无穷积分,将分子中最外层积分符号内的被积函数通过多项式拟合获得用解析式表达的拟合式,在积分域上进行积分可得到无量纲温度分布.通过式(21)可求得超声速楔状流在绝热壁温边界条件下楔状流层流边界层内无量纲温度分布.图6为不同的 Pr 条件下,边界层归一化的无量纲温度 θ_2/r_c 随 η 的变化趋势,由图可知,随着相似变量 η 的不断增大,边界层内气体的无量纲温度逐渐降低, Pr 越大温度降低得越快.

对式(21)、式(22)在 Pr 一定时进行积分可获得绝热壁温边界条件下超声速层流边界层内无量纲温度的数值解,但此运算过程复杂,计算难度大.本文给出了如式(24)所示的无量纲温度拟合

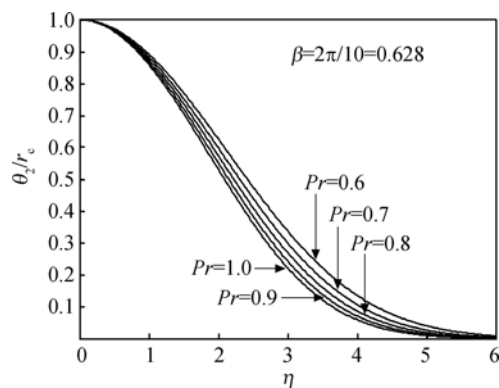


图6 绝热壁面楔状流层流边界层无量纲温度分布

Fig. 6 Dimensionless temperature distributions in laminar boundary layer of wedge flows under condition of adiabatic wall

解,该式的使用范围为 $0 \leq \eta \leq 8, 0.6 \leq Pr \leq 1.0$,拟合解是 e^x 形式的指数函数,形式简洁,指数是相似变量 η 的3次多项式,只包含平方项和三次方项,多项式系数是 Pr 的线性函数,反映了无量纲温度随相似变量 η 和 Pr 的变化规律,可以大大减少计算工作量和计算难度.

$$\theta_2/r_c = \exp\{-(0.0123Pr - 0.0035)\eta^3 + (0.0790Pr + 0.0629)\eta^2\} \quad (24)$$

与图5对应,图7只给出了 $Pr=0.6$ 和 $Pr=1.0$ 时 θ_2/r_c 的数值解与拟合解.当 Pr 分别为0.6,0.7,0.8,0.9和1.0时,由式(24)计算的拟合解与用式(21)通过数值积分获得的数值解差值的绝对值分别小于 $3.28 \times 10^{-3}, 1.76 \times 10^{-3}, 2.14 \times 10^{-3}, 1.72 \times 10^{-3}$ 和 2.77×10^{-3} .比较拟合式(15)和式(24)与解析式(12)和式(21)求解无量

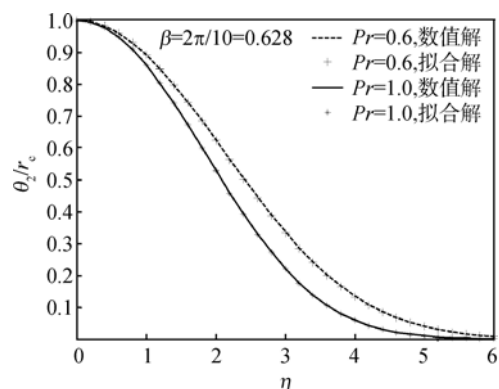


图7 绝热壁面楔状流层流边界层无量纲温度拟合解与数值解

Fig. 7 Approximation solution and numerical solution of dimensionless temperature in laminar boundary layer of wedge flows under condition of adiabatic wall

纲温度的计算过程,拟合式求解方便,运算时间短,与解析式所得计算结果差别很小,说明拟合解很好地反映了解析解所描述的温度分布的物理特征。

利用叠加原理可得超声速楔状流层流边界层无量纲温度微分方程式(18)的通解,它由式(12)和式(21)线性叠加而成,其表达式如式(25)所示

$$\Theta = c_1(1 - \theta_1) + \theta_2 + c_2 \quad (25)$$

由边界条件 $\Theta(\infty) = 0, 1 - \theta_1(\infty) = 0, \theta_2(\infty) = 0$, 得到式(25)中的 $c_2 = 0$; 由边界条件 $\theta_1(0) = 0$, 可得表达式

$$c_1 = \Theta(0) - \theta_2(0) = (T_w - T_{aw}) / [u_\infty^2 / (2c_p)] \quad (26)$$

将所得到的 $c_1, c_2, \theta_1, \theta_2$ 代入式(25)中,等式两边同乘以 $u_\infty^2 / (2c_p)$ 得式(27)

$$T = (T_w - T_{aw})(1 - \theta_1) + (T_2 - T_\infty) + T_\infty \quad (27)$$

式中 $T_{aw} = T_\infty + r_c u_\infty^2 / (2c_p)$, 根据式(27)、 θ_1 及 T_2 的表达式运算得到当 $T_\infty = 107\text{ K}$, $Pr = 0.7$ 和 $Pr = 1.0$ 时的气体绕 $\beta = 2\pi/10 = 0.628$ 的楔形体楔状流层流边界层内两组温度分布曲线,如图 8 所示($\hat{\theta}_w = T_w / T_\infty$). 根据 T_w 和 T_{aw} 的关系,计算得到当 $Pr = 0.7$ 时 3 种不同条件下的温度曲线关系: ①壁温 $T_w > T_{aw}$ 时,为曲线 a ; ②壁温 $T_w = T_{aw}$ 时,为曲线 b ; ③壁温 $T_w < T_{aw}$ 时,为曲线 c . 当 $Pr = 1.0$ 时 3 种不同条件下的温度曲线关系为: ①壁温 $T_w > T_{aw}$ 时,为曲线 a' ; ②壁温 $T_w = T_{aw}$ 时,为曲线 b' ; ③壁温 $T_w < T_{aw}$ 时,为曲线 c' . 在曲线 b 与曲线 a 之间(或曲线 b' 与曲线 a' 之间)楔形体向边界层气体放热;在曲线 b 与曲线 c 之间(或曲线 b' 与曲线 c' 之间)为边界层气体向楔形体放热. 由图可见,在超声速条件下, Pr 越大,温度变化越快。

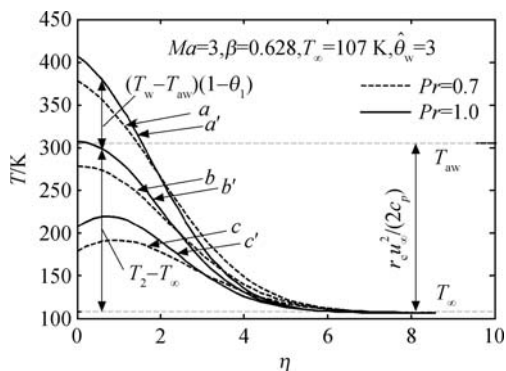


图 8 楔状流层流边界层温度分布

Fig. 8 Temperature distributions in laminar boundary layer of wedge flows

3 可压缩变物性超声速流沿平板流动层流边界层速度与温度分布

超声速楔状流需考虑流体压缩性及动力黏度随温度变化等因素的影响,为了与第 2 节不可压缩常物性条件下超声速楔状流的计算结果进行对比,以平板(楔形角为 0)为例进行了计算,获得了可压缩变物性与不可压缩常物性条件下超声速楔状流层流边界层内无量纲速度和温度分布特点。

考虑可压缩变物性对层流边界层内速度和温度分布的影响,超声速平板层流边界层内流动与传热特性用以下微分方程组来描述:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (28)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (29)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (30)$$

$$\rho u \frac{\partial(c_p T)}{\partial x} + \rho v \frac{\partial(c_p T)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (31)$$

其中气体动力黏度随气体绝对温度呈幂函数变化^[21],即 $\mu/\mu_r = (T/T_r)^\alpha$, T_r 和 μ_r 分别为参考温度和参考动力黏度,幂指数 α 在考虑真实气体效应时为 0.69, κ 为导热系数. 用相似变换法定义如下两个相似变量和无量纲流函数

$$\hat{\eta}(x, y) = \frac{\rho_w u_\infty}{\sqrt{2\xi}} \int_0^y \left(\frac{\rho}{\rho_w} \right)^\alpha dy \quad (32)$$

$$\hat{\xi} = \int_0^x \rho_w \mu_w u_\infty d\xi \quad (33)$$

$$\hat{f} = \hat{\psi}(x, \hat{\eta}) / \sqrt{2 u_\infty \nu_w x} \quad (34)$$

其中下标 w 表示壁面. 假设气体密度随无量纲温度呈线性变化,即 $\rho/\rho_w = \hat{\theta}_w / \hat{\theta}(\hat{\eta})$, 其中 $\hat{\theta}_w = T_w / T_\infty$, $\hat{\theta}(\hat{\eta}) = T / T_\infty$, T 为绝对温度。

对比第 2 节不可压缩常物性条件下的相似变量与本节可压缩变物性条件下的相似变量定义式可知 $\eta = \sqrt{2} \hat{\eta}$, 为便于比较,用 ξ 表示可压缩变物性相似变量,即 $\sqrt{2} \hat{\eta} = \xi$. 不可压缩常物性条件下的无量纲速度 $f'(\eta) (= u/u_\infty)$ 与可压缩变物性条件下的无量纲速度 $\hat{f}'(\xi)$ 满足关系式

$$f'(\eta) = (\hat{\theta}_w / \hat{\theta})^{-1} \hat{f}'(\xi) \quad (35)$$

为简单表示式(35)等号右边的部分,设可压缩变物性条件下无量纲流函数的变换形式为 $\hat{g}'(\xi)$

$$(\hat{\theta}_w / \hat{\theta})^{-1} \hat{f}'(\xi) = \hat{g}'(\xi) \quad (36)$$

将可压缩变物性条件下的无量纲温度 $\hat{\theta}(\xi)$ 换算

成与不可压缩常物性条件下的无量纲温度 $\Theta(\eta)$ 相同的形式,使两者具有可比性.不可压缩常物性与可压缩变物性条件下的无量纲温度满足如下关系:

$$\Theta(\eta) = [\hat{\theta}(\hat{\zeta}) - 1] / \frac{u_\infty^2}{2c_p T_\infty} \quad (37)$$

为简单表示式(37)等号右边的部分,设可压缩变物性条件下无量纲温度的变换形式为 $\hat{\Theta}(\hat{\zeta})$

$$[\hat{\theta}(\hat{\zeta}) - 1] / \frac{u_\infty^2}{2c_p T_\infty} = \hat{\Theta}(\hat{\zeta}) \quad (38)$$

经相似变换,微分方程组式(28)~式(31)可转化为式(39)和式(40)所示的无量纲形式

$$\begin{aligned} \hat{f}''' + \hat{f}\hat{f}'' = \\ \frac{\alpha-1}{\hat{\theta}} \left[\hat{f}'\hat{\theta}'' + 2\hat{\theta}'\hat{f}'' + \hat{f}\hat{f}'\hat{\theta}' - \alpha \frac{\hat{f}'(\hat{\theta}')^2}{\hat{\theta}} \right] \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \hat{\theta}'' + \text{Pr}\hat{f}\hat{\theta}' = \\ -(\gamma-1)\text{Ma}^2 \text{Pr} \left[\left(\frac{\hat{\theta}_w}{\hat{\theta}} \right)^{\alpha-1} \right]^2 \left[\hat{f}'' - (\alpha-1) \frac{\hat{f}'\hat{\theta}'}{\hat{\theta}} \right]^2 \end{aligned} \quad (40)$$

对应的边界条件为 $\hat{\eta}=0$ 处, $\hat{f}'(0)=0$, $\hat{f}(0)=0$, $\hat{\theta}(0)=\hat{\theta}_w$; $\hat{\eta}=\infty$ 处, $\hat{f}'(\infty)=\hat{\theta}_w^{-(\alpha-1)}$, $\hat{\theta}(\infty)=1$.

对于空气,当 $T_\infty = 107 \text{ K}$, $u_\infty = \text{Ma}\sqrt{\gamma RT_\infty}$, $R=287 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ 时,根据埃克特参考温度法^[10]确定 c_p 约为 $1010 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$. 利用 Runge-Kutta 法求解式(39)和式(40),得到气体可压缩、黏度随温度呈幂函数变化、不同马赫数条件下及不同 $\hat{\theta}_w$ 条件下层流边界层内无量纲速度和温度的相似解.将计算结果与不可压缩常物性条件下求得的无量纲速度相似解进行对比,结果如图9和图10所示.

由图9可知,当 $\hat{\theta}_w=1$ 时,在不可压缩常物性

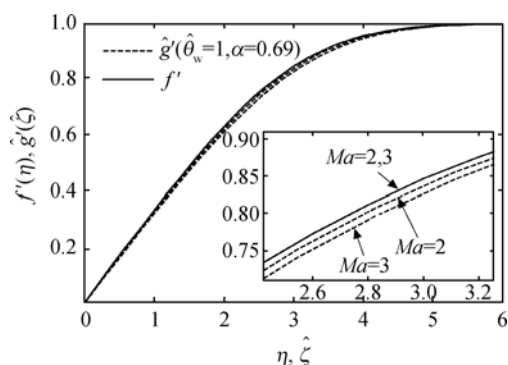


图9 不可压缩常物性与可压缩变物性条件下不同马赫数时层流边界层无量纲速度分布

Fig. 9 Dimensionless velocity distributions with different Mach numbers in laminar boundary layer of an incompressible gas with constant properties and a compressible gas with variable properties

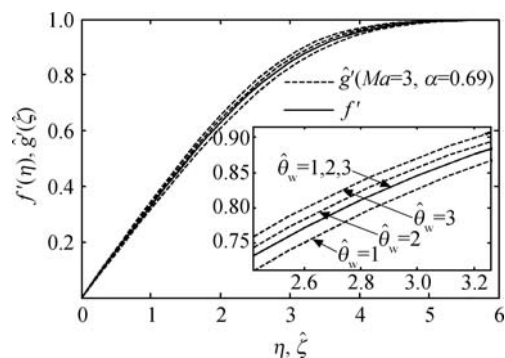


图10 不可压缩常物性和可压缩变物性条件下不同 $\hat{\theta}_w$ 时的层流边界层无量纲速度分布

Fig. 10 Dimensionless velocity distributions with different $\hat{\theta}_w$ in laminar boundary layer of an incompressible gas with constant properties and a compressible gas with variable properties

条件下,层流边界层内无量纲速度分布不受马赫数的影响;在可压缩变物性条件下,马赫数对无量纲速度分布影响很小;可压缩变物性条件下无量纲速度与不可压缩常物性条件下无量纲速度差别很小.由图10可知,马赫数恒定时,不可压缩常物性条件下层流边界层内无量纲速度分布不受壁面温度的影响;可压缩变物性条件下壁面温度对层流边界层内无量纲速度分布影响较小.

可压缩变物性条件下层流边界层内无量纲温度的相似解与不可压缩常物性条件下求得的无量纲温度相似解进行对比,结果如图11所示.

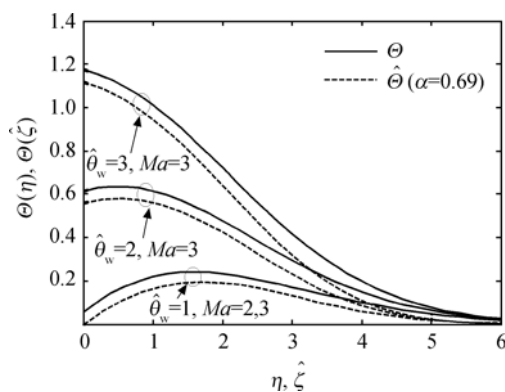


图11 不可压缩常物性与可压缩变物性条件下层流边界层无量纲温度分布

Fig. 11 Dimensionless temperature distributions in laminar boundary layer of an incompressible gas with constant properties and a compressible gas with variable properties

由图11可知,马赫数一定时,壁面温度对层流边界层内无量纲温度有较大影响;可压缩变物性条件下求得的无量纲温度比不可压缩常物性

条件下求得的无量纲温度稍低;当 $Ma=3$, $\hat{\theta}_w$ 分别等于 1, 2 和 3 时,不可压缩常物性与可压缩变物性条件下的无量纲温度最大差值分别小于 0.060, 0.069 和 0.108;当 $\hat{\theta}_w=1$ 时,在不可压缩常物性和可压缩变物性两种条件下,层流边界层内无量纲温度分布均不受马赫数的影响。

本文计算了当 $T_\infty=107\text{ K}$, $u_\infty=622.5\text{ m/s}$, $Ma=3$ 以及 $\hat{\theta}_w=1$ 时,不可压缩常物性条件下和可压缩变物性条件下的无量纲速度,并与文献[22]的实验数据进行了对比,结果如图 12 所示。

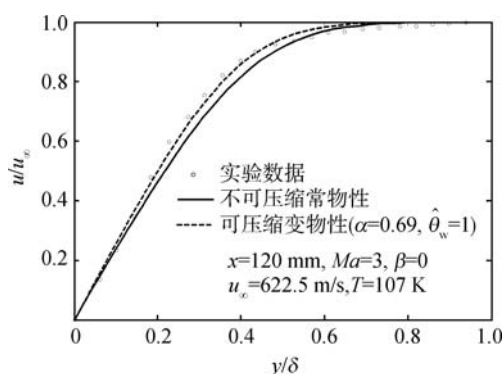


图 12 不可压缩常物性和可压缩变物性条件下层流边界层无量纲速度计算结果与实验数据对比

Fig. 12 Comparison between calculated results and experimental data for dimensionless velocity distributions in laminar boundary layer of an incompressible gas with constant properties and a compressible gas with variable properties

由图 12 可知,可压缩变物性和不可压缩常物性条件下求得的无量纲速度与实验数据^[22]误差的绝对值分别小于 0.02 和 0.08,相对误差绝对值分别小于 14.5% 和 12.9%;不可压缩常物性条件下求得的无量纲速度小于可压缩变物性条件下求得的无量纲速度,两者的相对误差绝对值小于 9.8%,因此可以用不可压缩常物性来计算超声速层流边界层内的无量纲速度。考虑气体马赫数、压缩性及黏度随温度变化等因素影响的超声速气流在任意楔形角楔状流层流边界层速度与温度特性将另文讨论。

4 结 论

本文用相似变换法推导了楔状流无量纲流函数 f 的 3 阶非线性常微分方程并用 Runge-Kutta 法进行了数值求解,获得了 11 个不同楔形角的楔状流流函数的 1 阶导数随相似变量 η 的变化曲

线。在常物性、不考虑黏性耗散作用条件下利用相似变换获得了亚声速气体恒壁温楔状流层流边界层无量纲温度解析解。提出了一个有 4 个待定系数的 5 次多项式无量纲流函数拟合式,利用该拟合式计算的拟合解有很高精度,可以代替数值解进行分析计算。利用梯形积分法计算得到恒壁温时无量纲温度在不同 Pr 下的数值解,表明在贴近壁面处 Pr 越大无量纲温度增加得越快,在边界层内同一位置上 Pr 越大无量纲温度越大。给出了 $0 \leq \eta \leq 8$, $0.6 \leq Pr \leq 1.0$ 时的恒壁温条件下无量纲温度的指数函数形式的拟合解,形式简洁,反映了无量纲温度随相似变量 η 和 Pr 的变化规律。

对于超声速气体绕楔形体流动层流边界层内的流动和换热,需考虑黏性耗散功转化成的热量对温度场的影响,本文用相似变换法推导了楔状流层流边界层内的无量纲温度 2 阶线性非齐次微分方程,得到超声速条件下壁面边界为绝热条件时的无量纲温度的解析解,获得了不同 Pr 条件下层流边界层内的无量纲温度随相似变量 η 的变化趋势。为了简化计算,本文给出了 $0 \leq \eta \leq 8$, $0.6 \leq Pr \leq 1.0$ 时的超声速绝热壁面边界条件下楔状流层流边界层无量纲温度的指数函数形式的拟合解,计算工作量和计算难度比获得数值解大大降低,且计算精度较高。超声速楔状流算例表明,当壁温大于绝热壁温时壁面向气体传热,当壁温小于绝热壁温时气体向楔形体传热;随相似变量 η 的增加,黏性耗散作用在壁面温度低于绝热壁温时可以使层流边界层气体温度出现先升高后降低的变化。

超声速可压缩变物性气体沿平板流动层流边界层内无量纲速度与温度分布计算结果表明:可压缩变物性和不可压缩常物性条件下求得的无量纲速度与实验数据的相对误差绝对值分别小于 14.5% 和 12.9%。不可压缩常物性条件下求得的无量纲速度小于可压缩变物性条件下求得的无量纲速度,两者的相对误差绝对值小于 9.8%。

参考文献:

- [1] 赵以强,刘世英,邓立君.高超声速楔形体前缘优化[J].内燃机与动力装置,2013,30(2):36-39.
ZHAO Yiqiang, LIU Shiyong, DENG Lijun. Optimization of power law leading edges in hypersonic flow[J]. Internal Combustion Engine and Power Plant, 2013,30(2):36-39. (in Chinese)
- [2] 杨鹏飞,方洋旺,黄春蓉,等.高超声速楔形模型飞行流场

- 数值模拟[J]. 飞行力学, 2013, 31(2): 113-117.
- YANG Pengfei, FANG Yangwang, HUANG Chunrong, et al. Numerical simulation of hypersonic flow fields around wedge model[J]. Flight Dynamics, 2013, 31(2): 113-117. (in Chinese)
- [3] Santos F N W, Lewis J M. Aerodynamic heating performance of power law leading edges in rarefied hypersonic flow [C]// Proceedings of 36th AIAA Thermophysics Conference. Orlando, US: AIAA, 2003: 1-11.
- [4] Lovett A J, Brogan P T, Philippona S D, et al. Development needs for advanced afterburner designs[R]. Fort Lauderdale, US: 40th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference, 2004.
- [5] 王燕, 郝英立. 机翼表面结冰数值模拟[J]. 东南大学学报: 自然科学版, 2009, 139(5): 956-960.
- WANG Yan, HAO Yingli. Numerical simulation of ice accretion on airfoil[J]. Journal of Southeast University: Natural Science Edition, 2009, 139(5): 956-960. (in Chinese)
- [6] Dufour E, Bouchez M. Computational analysis of a kerosene-fueled scramjet[R]. Kyoto, Japan: AIAA/NAL-NASDA-ISAS 10th International Space Planes and Hypersonic Systems and Technologies Conference, 2001.
- [7] Kodera M, Sunami T, Nakahashi K, et al. Numerical study of mixing and combustion process of a scramjet engine model[R]. Kyoto, Japan: AIAA/NAL-NASDA-ISAS 10th International Space Planes and Hypersonic Systems and Technologies Conference, 2001.
- [8] 孙冰, 郑力铭. 超燃冲压发动机支板热环境及热防护方案[J]. 航空动力学报, 2006, 21(2): 336-341.
- SUN Bing, ZHENG Liming. Research of scramjet strut thermal environment and thermal protection scheme[J]. Journal of Aerospace Power, 2006, 21(2): 336-341. (in Chinese)
- [9] 宋冈霖, 田亮, 江强, 等. 超燃冲压发动机支板热性能研究[J]. 推进技术, 2006, 21(2): 809-816.
- SONG Ganglin, TIAN Liang, JIANG Qiang, et al. A study for scramjet strut thermal performance[J]. Journal of Propulsion Technology, 2006, 21(2): 809-816. (in Chinese)
- [10] 杨强生, 蒲保荣. 高等传热学[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 1996.
- [11] 凯斯·W M, 克拉福特·M E. 对流传热与传质[M]. 陈熙, 翟殿春, 译. 北京: 科学出版社, 1986.
- [12] Goldstein R J, Howarth L. Modern development in fluid dynamics: high speed flow[M]. Oxford: Clarendon Press, 1953.
- [13] 孙雁, 钟万勰. 二维边界层方程的迭代求解[J]. 计算力学学报, 2010, 27(3): 385-390.
- SUN Yan, ZHONG Wanxie. Iterative solution for two-dimensional boundary layer equations[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2010, 27(3): 385-390. (in Chinese)
- [14] 郑连存, 温安国, 张欣欣. Falkner-Skan 方程的近似解析解[J]. 计算力学学报, 2008, 25(4): 506-510.
- ZHENG Liancun, WEN Anguo, ZHANG Xinxin. Approximate analytical solution for Falkner-Skan equation[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2008, 25(4): 506-510. (in Chinese)
- [15] 施梨, 张世杰, 叶松. 大椭圆星载轨道预报系统设计[J]. 航天控制, 2010, 28(6): 43-48.
- SHI Li, ZHANG Shijie, YE Song. The onboard orbit propagation system design of large elliptical orbit[J]. Aerospace Control, 2010, 28(6): 43-48. (in Chinese)
- [16] Eckert E R G, Drake R M Jr. Analysis of heat and mass transfer[M]. New York: McGraw Hill, 1972.
- [17] 章梓雄, 董曾南. 黏性流体力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2011.
- [18] 张靖周. 高等传热学[M]. 北京: 科学出版社, 2009.
- [19] 杨强生. 对流传热与传质[M]. 北京: 高等教育出版社, 1985.
- [20] 王补宣. 工程传热传质学[M]. 北京: 科学出版社, 1998.
- [21] Toro P G P, Rusak Z, Nagamatsu H T, et al. Self-similar compressible laminar boundary layers[R]. AIAA 97-0767, 1997.
- [22] 何霖. 超声速边界层及激波与边界层相互作用的实验研究[D]. 长沙: 国防科学技术大学, 2011.
- HE Lin. Experimental investigation of supersonic boundary layer and shock wave/boundary layer interaction[D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2011. (in Chinese)